Řešení první série (9.3.2009)

Úlohy z varianty 18, ročník 2008

11.

Hlavní myšlenka: ciferené součty

Postup: nejprve se zamyslíme nad tím, co nám říká forma, tj. způsob znázornění („Co chtěl autor uchazečům sdělit tím, že to nakreslil právě takto...?“). Čísla na obvodu kruhu jsou v jistém smyslu rovnocenná, číslo uprostřed má jakési „výsadní“ postavení, čili bude patrně v jistém smyslu společné všem číslům po obvodu. Může jít tedy např. o společný násobek či dělitel čísel na obvodu, nebo o **ciferný součet** všech jednotlivých čísel.

Vidíme, že tato poslední možnost je zcela jistě správná:
2 + 1 + 1 = 4, 2 + 2 = 4, 1 + 0 + 2 + 1 = 4, …
Totéž platí ve druhém kruhu: 5 + 4 = 9, 3 + 3 + 3 = 9, …

V této úloze vybíráme číslo, které se nehodí na místo otazníku, tedy takové, které nemá ciferný součet 9. Takové je právě číslo 505, to má ciferný součet 10.

Správná odpověď: e)

Rada či upozornění: vybíráme číslo, které se **<u>nehodí</u>** na místo otazníku. Využívejte toho, že do zadání je možné zapisovat – podtrhávejte si klíčová slova ze zadání, předejdete tak některým chybám z nepozornosti.

12.

Hlavní myšlenka: výpočet základu v situaci, kdy známe procentovou část a počet procent

Postup: nejprve spočítáme celky C_1 a C_2 a následně určíme, která jednotlivých rovností platí.
12 je 30 % z celku C_1, tedy deset procent z celku C_1 je 12 : 3 = 4. Sto procent C_1, čili celek C_1 musí tedy být roven 40. (Jde vlastně o přímou úměru. Bylo by možné spočítat samozřejmě i 1 procento z celku C_1, to by nám vyšlo 0,4, ale tento postup je pohodlnější, uvědomíme-li si, že deset procent není nic jiného než jedna desetina celku).

Nyní se podíváme na hodnotu C_2: 8 je 40 % z celku C_2. Opět se podíváme na deset procent z C_2 : to se musí rovnat 8 : 4 = 2. Deset procent je desetina, čili, čili celek C_2 se tedy musí rovnat 2 . 10 = 20.

Správná odpověď: d)

Rada či upozornění: počítáme-li s desítkami procent, je často pohodlnější uvědomit si, že se jedná o desetiny celku.

13.

Hlavní myšlenka: úpravy zlomků usnadňující porovnávání

Postup: v první sadě nás čísla vyzývají ke krácení. Hned první zlomek můžeme vykrátit třemi, čímž dostaneme 2/3. Je dobré si pamatovat, že 1/3 = 0,333333.... a dvě třetiny tedy musí mít hodnotu 0,66666666... (neukončený desetinný rozvoj). Vzhledem k tomu, že poslední číslo souboru má hodnotu 0,6, nemůže první sada nerovností platit.

Ve druhé sadě porovnáváme záporná čísla. V takovýchto případech je praktičtější „odebrat“ znaménka a obrátit nerovnosti (např. místo zjišťování, zda platí -5<-4 určujeme, zda platí 4<5).

Musíme tedy porovnat, zda platí, že 0,3 je menší nebo rovno 1/3. To ale není pravda, protože 1/3 = 0,33333....

Ani druhý soubor nerovností neplatí. (Všiměte si, že jsme se ani nemuseli zabývat číslem 4/14.)

Třetí sada obsahuje rovnosti, první zlomek zkrátíme dvojkou, dostaneme tedy 5/4, druhé číslo necháme beze změny a 15/12 zkrátíme trojkou, čímž dostaneme 5/4. Nyní si stačí uvědomit, že 5/4 je totéž, co 1 + ¼ a jelikož jedna čtvrtina je rovna 0,25, všechny rovnice platí.

Správná odpověď: b)

Rada či upozornění: je dobré vědět, jak se dají zlomky typu 1/4, 1/5, 1/3, vyjádřit jako desetinná čísla.

14.

Hlavní myšlenka: odčítání čísel na určitých pozicích.

Postup: stejně jako v ostatních úlohách, které obsahují nějaký diagram, obrázek či schéma, je vhodné popřemýšlet nad formou. Vzhledem k tomu, že čísla nejsou v jedné řádce, půjde patrně o nějaké operace s čísly v různých hladinách.

Schéma má tvar části trojúhelníku, kde typicky číslo v jedné hladině vzniklo ze dvou horních či spodních sousedů pomocí nějaké jednoduché operace. Nejinak je tomu i v tomto případě. Dané číslo, které není krajní, je rozdílem levého a pravého spodního souseda, např.: 5 – 3 = 2, 1 – 4 = -3, …

Nejdříve tedy určíme hodnotu nejlevějšího otazníku: 2 – ? = -4. Na místě otazníku tedy musí být číslo 6. Budeme tedy volit mezi variantami b) a e). Na místě prostředního otazníku tedy jistě bude číslo -3, to je totiž shodné pro obě varianty (3 – ? = 6. Zde tedy musí být na místě otazníku opravdu číslo -3. Pozor, uvědomte si, jak se odčítají záporní čísla!).
Podíváme se na pravý otazník: zde bude číslo které, ***odečteno*** od 6, dá 10. Je to číslo -4, protože 6 – (-4) = 10. Opět si uvědomíme, jak se odečítají záporná čísla.

Správná odpověď: b)

Rada či upozornění: má-li schéma tvar trojúhelníku, půjde zpravidla o operace na dvojici horních či spodních sousedů. Není od věci si pořádně uvědomit, jak se odečítají záporná čísla (je to triviální, nicméně divili byste se, kolika lidem to činí problémy...)

15.

Hlavní myšlenka: počítání se zbytky

Postup: nejprve si prohlédneme jednotlivá schémata. Všimneme si, že první číslo je vždy větší než ostatní. Mohlo by tedy vzniknout násobením nebo sčítáním čísel následujících. Nyní již zbývá vyzkoušet možná pořadí a kombinace jednotlivých operací. Snadno přijdeme na to, že:

24 = 5 . 4 + 4, jinými slovy, vydělíme-li číslo dvacet čtyři pěti, bude výsledek 4 a zbytek 4.
35 = 7 . 5 + 0, tedy zbytek po celočíselném dělení čísla 35 číslem 7 je 0.

V úloze hledáme čísla, která se ***nehodí*** na místa otazníků. Z nabídnutých možností je to právě d), protože není pravda, že by platilo 46 = 6 . 8 + 1.

Správná odpověď: d)

Rada či upozornění: opět hledáme to, co se nehodí na místa otazníků, podtrhneme si klíčové slovo ze zadání. Všímáme si hodnot jednotlivých čísel a říkáme si, jestli číslo na některé pozici není vždy větší než ostatní atp.

16.

Hlavní myšlenka: mocnění přirozených čísel na druhou, úloha inspirovaná Pythagorovou větou

Postup: znovu si klademe otázku, jaká informace se skrývá v grafickém znázornění. Mnozí z nás si při pohledu na tato schémata vzpomenou na obrázky, jimiž se ilustroval význam Pythagorovy věty. délka přepony na druhou je rovna součtu velikostí ploch čtverců nad odvěsnami.

V našem případě to znamená, že je-li plocha čtverce nad přeponou rovna 50, měl by součet čtverců (tj. druhých mocnin) délek odvěsen být roven také 50. Ověříme to na prvním schématu: $7^2 + 1^2 = 50$. Totéž platí ve druhém schématu: $3^2 + 4^2 = 25$. Na místě otazníku tedy bude číslo, které po umocnění na druhou a přičtení k 6^2 dá 40, tedy číslo 2. ($6^2 + 2^2 = 40$).

Správná odpověď: a)

Rada či upozornění: stojí za to si projít co největší množství úloh s grafickým zadáním a u těch „komplikovanějších“ si promyslet, čím byly inspirovány.

17.

Hlavní myšlenka: identifikování toho, jak „fungují“ jednotlivé posloupnosti

Postup: nejprve se podíváme na „šikmo jdoucí“ posloupnost. Vyskytují se v ní čísla

-1/4, ½, 2, -4, …

Zjevně tedy půjde o násobení (mocniny) dvojky, se střídajícími se znaménky.

Na místě levého otazníku tedy bude číslo -1. Směrem dolů čísla násobíme dvojkou a střídáme při tom znaménka. (Přesně řečeno, jde o geometrickou posloupnost s kvocientem -1/2.)

Druhá posloupnost tedy vypadá takto:

-1; ?; 2,6; 6,2; 11; 17

To je dost neobvykle vyhlížející posloupnost. Máme-li před sebou něco takového, vždy si zkusíme udělat rozdíly sousedních členů:
Kolik musíme přičíst k číslu 11, abychom dostali 17? Právě 6.

Kolik musíme přičíst k číslu 6,2, abychom dostali 11? Právě 4,8.
Kolik musíme přičíst k číslu 2,6, abychom dostali 6,2? Právě 3,6.

Napište si to přímo nad čísla v posloupnosti!

Čeho si všimneme nad posloupností čísel 3,6; 4,8; 6? Liší se právě o 1,2. Před číslem 3,6 tedy bude právě 2,4.

K otazníku tedy musíme přičíst právě 2,4, abychom dostali číslo 2,6. Na místě otazníku tedy bude číslo 0,2.

Vše sedí, protože -1 + 1,2 = 0,2
Dále, 0,2 + 2,4 = 2,6

Správná odpověď: a)

Rada či upozornění: v posloupnosti si všímáme „významných čísel“ (typu mocniny dvojky apod.), dále si v posloupnosti zkusíme zjistit, jaké jsou rozdíly sousedních členů.

18.

Hlavní myšlenka: řešení soustavy rovnic, kde roli neznámých hrají nikoliv písmenka, ale symboly.

Postup: uvědomíme si, že symboly jako trojúhelník a srdíčko zastupují čísla, fungují tedy jako neznámé. Místo nich si tedy můžeme dovolit klidně psát X a Y, jak jsme zvyklí.
X...srdíčko
Y...trojúhelníček

Rovnice má tedy tvar (X – 3) . Y = 9 – X . Y. Dále víme, že 4 – X . Y = 0, čili X . Y = 4.

První rovnici upravíme: předně roznásobíme závorku, tedy XY – 3Y = 9 – XY. Místo XY můžeme nyní rovnou psát 4, čili dostaneme 4 – 3Y = 9 – 4, což dále zjednodušíme na 4-3Y = 5, čtyřku následně převedeme na druhou stranu a máme -3Y = 1.
A zde už máme výsledek: Y = -1/3.

Správná odpověď: b)

Rada či upozornění: nenechte se zmást symboly, zde hrají roli obyčejných neznámých.

19.

Hlavní myšlenka: porozumění pojmu operace.

Postup: jedná se o úlohu, která je pro řadu uchazečů neřešitelná, nicméně při pochopení prinicipu není zdaleka tak obtížná, jak by se mohlo zdát. Klíčové je uvědomit si roli symbolů Δ a ○. **Nejedná** se o proměnné/neznámé, které by zastupovaly nějaká čísla, která bychom měli spočítat!

(Číselná) operace je cosi, co z nějakých vstupů (argumentů) vytvoří další číslo. Příkladem operace je třeba sčítání. Sčítání přiřadí dvěma argumentům 3 a 4 číslo 7. Nebo argumentům 5 a 4 číslo 9. V zápisu x + y máme argumenty nalevo a napravo od symbolu pro sčítání. Podobně je to u nově definované operace Δ. O operaci Δ víme z definice, že argumentům *a* a *b* přiřazuje jejich součet vynásobený *a* – to je přesně významem zápisu:
$a \Delta b = (a + b) . a$

Jinými slovy, $a \Delta b$ je prostě zkratka za $(a + b) . a$.

Abychom si lépe uvědomili, jak celá věc funguje, pojďme se podívat na to, kolik je např.:
$6 \Delta 5$. Víme, že je to vlastně zkratka za $(6 + 5) . 6$. No, a to je rovno $11 . 6 = 66$.

Dále, chceme-li vědět, kolik je třeba $2 \Delta 1$, prostě dosadíme v definici všude za a dvojku a za b jedničku. Takže $2 \Delta 1 = (2 + 1) . 2 = 3 . 2 = 6$.

V úloze 19 se setkáváme s tím, že víme, že $3 \Delta x = 6$ a naším cílem je zjistit, hodnotu $\circ\circ\circ x$.

Nejprve tedy musíme určit x. Vyjdeme z toho, že podle definice $3 \Delta x = (3 + x) . 3$.
V rovnici $3 \Delta x = 6$ tedy $3 \Delta x$ nahradíme výrazem $(3 + x) . 3$, takže dostáváme

$$(3 + x) . 3 = 6.$$

Tohle už je obyčejná rovnice, na kterou jsme zvyklí. Asi nedá příliš mnoho práce, abychom zjistili, že x se v tom případě musí rovnat -1. Tak, první část práce je za námi.

Upozornění: někteří se domnívají, že Δ označuje některou ze známých operací (+, -, ., :) a naším cílem je ji nějakým způsobem uhodnout – tak to není! To, co operace dělá, máme popsáno v definici, a není to nic, co by se dalo vyjádřit pomocí nějaké známé operace!

Nyní musíme ještě zjistit, kolik je hodnota $\circ\circ\circ x$, kde $x = -1$. Jde nám tedy fakticky o zjištění, kolik je $\circ\circ\circ(-1)$. Pozor, není to žádné $\circ$ krát $\circ$ krát $\circ$ krát -1!!! (To by bylo něco podobného, jako kdybychom cos x četli jako kosinus krát x...)

Jak funguje operace $\circ$? To je opět popsáno v definici. $\circ a = (1 - a)^2$. Tato operace nechce dva argumenty jako operace Δ, ale jen jeden. S takovýmito opracemi jsme se potkali už dříve na základní škole, např. když nám říkali, co je to operace umocňování na druhou nebo odmocnina, nebo třeba kosinus.

Operace umocňování na druhou je definována takto (jistě si pamatujete :-)))):
$x^2 = x . x$
Když chceme zjistit, kolik je třeba -5 na druhou, přepíšeme všude x v definici za -5 a okamžitě vidíme, že je to 25.

S operací $\circ$ to funguje úplně stejně! Chceme vědět, kolik je $\circ(-1)$?
Tak všude v definici $\circ a = (1 - a)^2$ přepíšeme argument a za číslo -1, a hned máme
$\circ(-1) = (1 - (-1))^2 = 4$.

Kousek jsme postoupili: $\circ\circ\circ(-1) = \circ\circ 4$,
protože $\circ(-1) = 4$, jak jsme právě zjistili.

Teď zjistíme, kolik je $\circ 4$: to už je vlastně jednoduché:
opět všude v definici přepíšeme áčko čtyřkou, takže dostaneme $\circ 4 = (1 - 4)^2 = 9$.
Takže zase víme o kus víc... $\circ\circ\circ(-1) = \circ\circ 4 = \circ 9$.
Když tedy vypočítáme, kolik je $\circ 9$, jsme u konce. Podle definice je ale $\circ 9 = (1 - 9)^2 = 64$.
A jsme u cíle!

Správná odpověď: b)

Rada či upozornění: I když se Vám výklad zdál dlouhý, zkuste jej pochopit. Není to neudělatelná úloha, při troše cviku se dá vyřešit relativně rychle.

20.

Hlavní myšlenka: porozumění pojmu operace.

Postup: máme před sebou úlohu, jejíž myšlenka je hodně podobná té předchozí. Rozumíte-li již pojmu operace, můžeme se pustit dál, jinak se podívejte na řešení předchozí úlohy.

Nyní víme, že ◊◊◊ a = 0. V předchozí úloze jsme měli x a zajímalo nás, kolik je ○○○x, teď víme, kolik je ◊◊◊ a a zajímá nás, kolik je a.

Abychom se v množství symbolů ◊ neztratili, udělejme si napřed jakousi zkratku: ◊◊ a budeme pro tuto chvíli označovat X. Takže původní rovnici ◊◊◊ a = 0, můžeme nyní zapsat jako ◊X = 0. A kolik se musí rovna X, aby ◊X = 0? Nahlédneme do definice. Vidíme, že ◊X = 1/2(3 – X) – 4, takže vlastně řešíme rovnici:
1/2(3 – X) – 4 = 0.
X se tedy musí rovnat -5.

Postoupili jsme o kousek: k tomu, aby ◊◊◊ a = 0 stačí, aby platilo ◊◊ a = *-5* (schválně si zkuste provést na -5 jednou operaci ◊, uvidíte, že dostanete nulu, o což nám šlo).

Teď si tento postup zopakujeme: Kolik je a, když ◊◊ a = *-5?* Budeme postupovat stejně, tentokrát si označíme písmenem Y výraz ◊ a. Díváme se tedy na situaci, kdy ◊Y = -5.

Kolik je ◊Y?
◊Y = 1/2(3 – Y) – 4 (podle definice)
a pokud se má ◊Y = -5,
musí platit 1/2(3 – Y) – 4 = -5.

Řešením této rovnice je Y = 5.

Takže teď už víme, že ◊ a = 5. Nyní jsme už skoro u konce, ◊ a = 1/2(3 – a) – 4 a to se má rovnat pěti. Kolik musí být v rovnici 1/2(3 – a) – 4 = 5 hodnota a? Je to -15.

Schválně si zkuste spočítat, kolik je ◊◊◊ (-15). Uvidíte, že Vám budou vycházet mezivýsledky stejné, jako naše Y a X, pokud počítáte správně :-)

Správná odpověď: d)

Rada či upozornění: Úlohu stojí za to pořádně promyslet, ale ve své podstatě není nijak zvlášť obtížná. Budete-li se na ní ptát, např. v našem fóru, zkuste specifikovat, ve kterém kroku jste se ztratili.

Potřebujete se na něco zeptat? Je tu pro Vás naše fórum!
www.prijimacky-tsp.cz

Martin Víta
Koordinátor Kurzy-Fido.cz | 604 619 669