Posloupnosti, limity a sumy

Tonda Fajstavr, Honza Jíša

Tento příspěvek si klade za cíl vysvětlit, co to vlastně jsou posloupnosti, jejich limity a sumy, popsat základní operace s nimi a pokud možno ukázat i některé zajímavosti. Samozřejmě bude čtenář zahrnován obsáhlými množinami příkladů. Pro snadnější pochopení (jak čtenáře, tak i k ulehčení práce samotným autorů) jsme se rozhodli nešermovat *pouze* s odbornými termíny, které beztak pramálo ovládáme, ale podat celou záležitost tak nějak lidsky a polopaticky. Možná to bude urážet inteligenci mnohých čtenářů, ale naším hlavním cílem je, aby byl text srozumitelný co možná nejširším vrstvám. Díky tomu se také čas od času dočkáte všelijakých prasečinek a zvěrstev.

Posloupnosti a limity

Pojďme na to tedy pěkně od lesa a položme si otázku, která nás nejvíc pálí:

Co jsou to vlastně posloupnosti?

Na pořádnou odpověď se nejdřív budeme muset zavést krásný pojem – zobrazení. Dobrá tedy, co je ono tajemné zobrazení? Jak prosté, milý Watsone, je to přiřazení právě jednoho člena množiny nějakému členu jiné množiny. To zní dost brutálně, takže si to opříkladujeme.

Příklad:
Množinou M budiž třeba pytlíček s bonbóny a množinou N skupinka malých somálských nezbedů. Zobrazení množiny N do množiny M (značíme $N \rightarrow M$) provedeme třeba tak, že každému vyhládlému Somálci přidělíme právě jeden bonbón nějaké barvy.

Můžou dostat dvě děcka bonbón stejné barvy? Ano! Stejně tak je tomu s čísly. Když například budeme přirozeným číslům přiřazovat čísla reálná (a vězte, že to budeme od nynějška činit neustále), tak dvěma přirozeným číslům může být přiřazeno stejné číslo reálné.

Může dostat jeden Somálec více bonbónů? I kdyby dělal psí oči, tak ne! Jednak si to nezaslouží, ale hlavně každému přiřazujeme právě jeden bonbón.

=> **Aplikace:**
Hned tu máme první aplikaci – jen díky vědomostem o zobrazení nyní můžete nakrmit hladovějící děti z východní Afriky. A pak že vyšší matematika nemá praktické uplatnění…

Ony to jsou ve své podstatě *funkce*, jen jejich definičním oborem jsou přirozená čísla.

Tohle nám pomůže k pochopení posloupností – **posloupnost** je totiž *reálné zobrazení.* Jak už bylo naznačeno, při reálném zobrazení přiřazujeme nějaké reálné číslo každému přirozenému číslu. To se nejlépe dělá podle předpisu. Nejdřív si ale ukážeme nějakou úplně náhodnou posloupnost, u které by se asi předpis hledal dost těžko. Do tabulky, kam vypíšeme několik prvních členů, přijdou nahoru čísla přirozená a dolů reálná:

N	1	2	3	4	5	6	atd.
R	318	π	7/16	0,13	$2^{61,3}$	e	atd.

A nebo se mrkneme na nějakou jinou:

N	1	2	3	4	5	6	atd.
R	1	4	9	16	25	36	atd.

Pěkná, že? Ale pozor, zdá se, že tady už mají přiřazená čísla nějaký vnitřní řád. Napišme si ho tedy jako předpis:

$a_n : N \rightarrow R$ (tady se píše, že a_n je reálná posloupnost)

$a_n = n^2$ (tady máme její předpis)

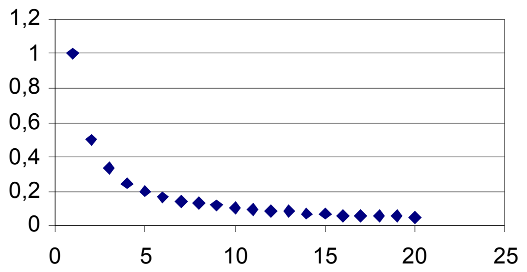
Tohle si můžeme taky představit jako takový kafemlejnek, do kterého vhodíme n, tedy přirozené číslo ($n \in N$), zatočíme klikou a vypadne z něj a_n, čili n-tý člen posloupnosti. Tahle hodnota je už číslo reálné ($a_n \in R$).

Graf posloupnosti

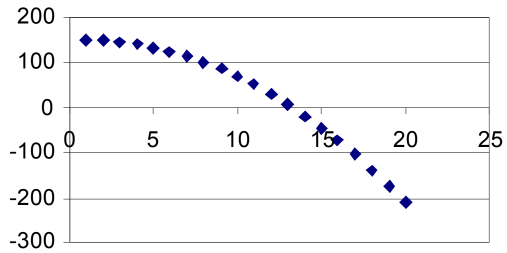
Teď, když víme, co to posloupnost je, se můžeme zamyslet, jak vypadá její graf. Grafem funkce byla nějaká (většinou) spojitá křivka. To bylo pro definiční obor reálných čísel. Přirozená čísla jsou o poznání řidší, tudíž grafem posloupnosti jsou body. Ukážeme si několik (slovy dva) grafíků takových posloupností:

Příklady:

$a_n = 1/n$



$a_n = -n^2 + 2n + 150$



Kdyby se body spojily, tak v prvním případě by grafem byla hyperbola, v druhém pak pěkná polynoma druhého stupně, tedy parabola.

Aritmetická posloupnost

A co taková aritmetická posloupnost? Co to vlastně je a k čemu může být dobrá? Aritmetická posloupnost je speciální případ posloupnosti, u které je rozdíl mezi jakýmikoliv dvěma po sobě jdoucími členy vždy konstantní – stejný. Následující člen získáme přičtením čísla *d* ke členu předcházejícímu. (*d* se nazývá diference aritmetické posloupnosti). Jinak vztahem bychom mohli tento princip vyjádřit takto: $a_{n+1} = a_n + d$. Příkladem aritmetické posloupnosti může být (a dokonce je) řada čísel od jedné do sta. Stejně jako řada sudých čísel od dvou do sta! Nebo také účet v bance, na který nám každý rok přičtou pětikorunu!

Jak zjistím, kolik mám na účtu po čtyřech letech, jestliže jsem na začátku uložil stokorunu ($a_4 = ?$)?

Čili $a_1 = 100$ (to značí oněch sto korun na počátku a také první člen u naší posloupnosti), n = 4 (n značí počet členů naší posloupnosti). Diferencí $d = 5$ (to je ta naše pětikoruna)

No, takže počáteční kapitál v bance je 100 Kč. Čtyři roky, čtyři členy v posloupnosti, přičtou nám vlastně čtyřikrát diferenci *d* (oněch 5 Kč), že? No to určitě! Ve skutečnosti přičtou diferenci jen třikrát, neboť první rok se nepočítá (to jsme tam ty peníze uložili). Tedy nakonec:

$a_4 = 100 + (4 - 1)d$
$a_4 = 100 + (4 - 1) \cdot 5$
$a_4 = 115$

Tak obecně nám platí $a_n = a_1 + (n - 1)d$ a tak to také platí u všech aritmetických posloupností.

Geometrická posloupnost

Stejně tak geometrická posloupnost je zvláštním druhem posloupnosti. Akorát tentokrát se nadcházející člen posloupnosti od členu předcházejícího liší tím, že je vynásobený nějakou konstantou, která je u celé řady čísel stejná. Obecně pak: $a_{n+1} = a_n \cdot q$ Mají tedy po sobě jdoucí členové řadě vždy stejný podíl, onu konstantu – „kvocient" q.

A v praxi se s takovou posloupností setkáváme třeba také v bance, kde nám vždy každý rok(počínaje druhým, samozřejmě) desetinu jmění vemou. Když tam máme nejdříve stokorunu, kolik nám tam bídáci nechají za pět let?

Nuže q je u nás $1 - \frac{1}{10}$, což je $\frac{9}{10}$, $a_1 = 100$, n (jako počet let – počet členů v posloupnosti) je 5.

$a_5 = 100 \cdot q^{5-1}$
$a_5 = 100 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4$
$a_5 = 65{,}61$ (bacha na ně!)

Obecně pak platí vztah prvního člena a člena libovolného u geometrické posloupnosti:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Limita posloupnosti

Opět na začátek sžíravá otázka: Co to je limita posloupnosti?

Limita posloupnosti nám říká, <u>jak se bude chovat posloupnost v nekonečnu</u>, jinými slovy, <u>které hodnotě se stále přibližuje.</u>

Berme třeba úplně tu nejjednodušší posloupnost $a_n = n$. Nikoho asi neohromí, že za limitu má nekonečno. Proč? No protože přeci stále roste. Čím větší čísla budu dosazovat, tím větší člen posloupnosti mi vypadne.

Zkusme nějakou jinou, třeba $a_n = 1/n$ a vypišme si prvních pár členů:

1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 atd. Ta čísla se stále zmenšují. Když dosadíme 1000, dostaneme jednu tisícinu, když 10^6, dostaneme miliontinu. Takže k čemu se asi tahle posloupnost blíží? K nule, má tedy za limitu nulu.

Teď, když už zhruba víme, co to limita znamená, tak si ji zadefinujmež a definici pak vysvětlemež:

Definice:

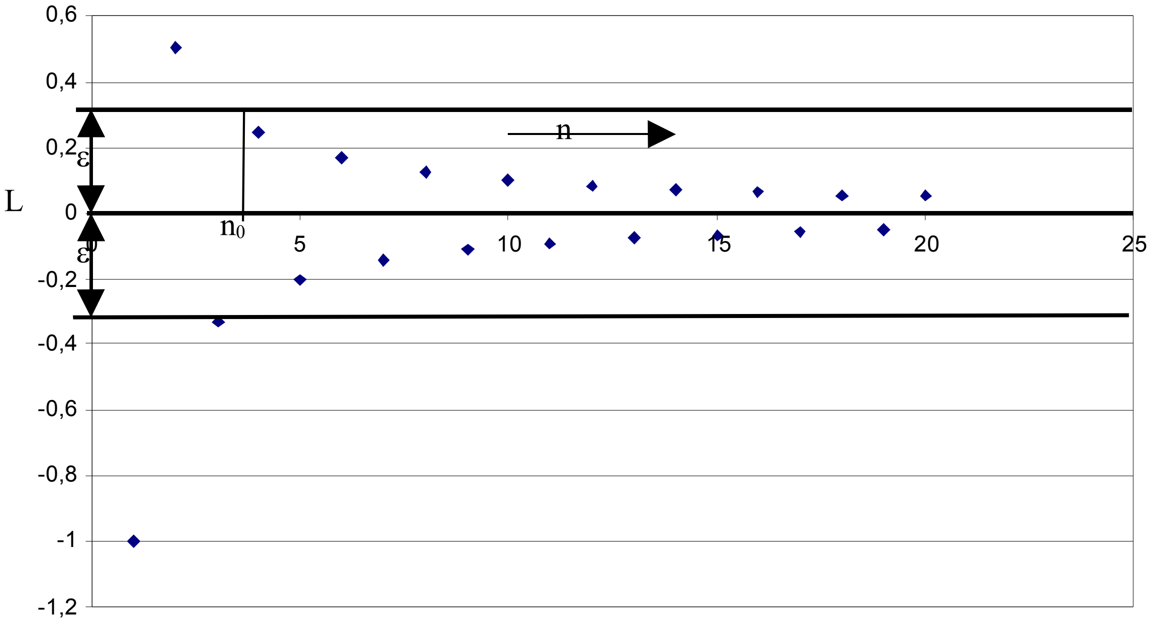
$a_n : N \rightarrow R$, $L := \lim a_n$, $\varepsilon \in R$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n > n_0 \ |a_n - L| < \varepsilon$

Čteme následovně:

Budiž a_n reálná posloupnost a L její limita. Pak musí platit, že:
Pro každé kladné epsilon existuje nějaké n_0 takové, že pro každé n větší než n_0 platí, že vzdálenost a_n od L je menší než epsilon.

„No co to u svatýho Eulera je??", říkáte si teď možná. Hned si to sdělíme. Tak tohle je zlotřilá definice, která je ovšem velmi důležitá, protože nám přesně říká, co to je vlastně limita posloupnosti. Pro lepší vysvětlení a pochopení si vezměme k ruce grafík a popišme si, co vlastně který symbol znamená:

Tohle je graf posloupnosti $a_n = 1/n \cdot (-1)^n$. A na něm si ukážeme, jak vlastně ta definice funguje. Říká, že když mi nějaký bídák hodí kladné ε, tak já mu najdu přirozené n_0 (na ose x) takové, že když do posloupnosti dosadím jakékoliv n větší než inkriminované n_0, vyjde mi bodík ležící v různě malém „pásu“ (který je určen právě velikostí ε) okolo limity.



V tomto případě násobíme tím $(-1)^n$ jen tak pro srandu, aby se nám hezky střídala kladná a záporná čísílka, na limitu to tentokrát nemá vliv. Řekli jsme si už, že limita 1/n je nula, tedy že L = 0. Zkusme tedy podle definice najít několik takových n_0 pro různé epsilony, které na nás budou vrhány.

$a_n = 1/n \cdot (-1)^n$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n > n_0 \ \ |a_n - L| < \varepsilon$

$|a_n - L| < \varepsilon$

$|1/n \cdot (-1)^n - 0| < \varepsilon$

$1/n < \varepsilon$

$n_0 = 1/\varepsilon$

Takže, když ε = 250, n_0 je 1/250, tudíž mi stačí vzít si jakékoliv přirozené číslo větší než 1/250 a splním danou podmínku. Tedy od jedničky výš.

Ovšem čím je epsilon menší, tím užší bude onen pás a tím větší n_0 budu muset použít. Např. když ε = 1/10, vyjde n_0 10, takže podmínku splňují přirozená čísla od 11 výše.

Ještě jedna důležitá poznámka:

Posloupnost může mít nanejvýš jednu limitu.

To znamená, že může mít jednu nebo taky žádnou. Příkladem posloupnosti bez limity je třeba samotné $a_n = (-1)^n$.

(Sem popř. důkaz – pozn. autora)

Operace s limitami

Nyní, když už máme základní povědomí o posloupnostech a jejich limitách, měli bychom se s nimi naučit i pracovat. Limitu jako takovou si můžeme značit všelijak, nejvíce se však vžil tajemný třípísmenný kryptogram lim. K práci s „limčou“ slouží několik šikovných pravidel:

Obecný zápis	**Slovní přelouskání**
$\lim(c \cdot a_n + b_n) = c \cdot (\lim a_n) + \lim b_n$	Limita součtu se rovná součtu limit. Platí i pro rozdíl. Zároveň můžeme před limitu vytknout konstantu.
$\lim(a_n \cdot b_n) = (\lim a_n) \cdot (\lim b_n)$	Limita součinu se rovná součinu limit. Platí také pro podíl.

No to je naprosto skvělé, ne? Díky těmto pravidlům můžeme velmi hbitě řešit i na první pohled značně ošklivé příklady. A pro vnitřní naplnění a duševní obohacení si jich teď můžeme pár spočítat. Budeme využívat výše uvedených pravidel a často i jednoho šikovného postupu – pokud máme složitý a nehezký zlomek, vytkneme si z čitatele i jmenovatele největšího „siláka“, tedy člen, který nejrychleji roste, a tím určuje celkový vývoj.

Názorně, po krocích:

$$\lim \frac{n^3+68n^2-e}{1{,}66n^2-\frac{\pi}{n}+5\cdot 10^{18}} = \lim \frac{n^3}{n^2}\cdot\frac{1+\frac{68}{n}-\frac{e}{n^3}}{1{,}66-\frac{\pi}{n^3}+\frac{5\cdot 10^{18}}{n^2}} = \lim n\cdot\frac{1+\frac{68}{n}-\frac{e}{n^3}}{1{,}66-\frac{\pi}{n^3}+\frac{5\cdot 10^{18}}{n^2}} =$$

¿ $$\lim n\cdot\frac{\lim 1+\lim\frac{68}{n}-\lim\frac{e}{n^3}}{\lim 1{,}66-\lim\frac{\pi}{n^3}+\lim\frac{5\cdot 10^{18}}{n^2}} = \lim n\cdot\frac{1+0-0}{1{,}66-0+0} = \infty$$

Další příklady:

$$\lim \frac{n^3+\sqrt[3]{8n}-318}{0{,}2n^{16}-\frac{101}{\pi n^{0{,}5}}+123456n^5} = \lim \frac{n^3}{n^{16}}\cdot\frac{1+\sqrt[3]{\frac{8}{n^8}}-\frac{318}{n}}{0{,}2-\frac{101}{\pi n^{16{,}5}}+\frac{123456}{n^{11}}} = \lim \frac{1}{n^{13}}\cdot\frac{1+0-0}{0{,}2-0+0} = 0$$

$$\lim \frac{63n^5-2n\sqrt{n}}{\pi n^5-\frac{22}{n^3}+e^{19}n^2} = \lim \frac{n^5}{n^5}\cdot\frac{63-\frac{2}{\sqrt{n^7}}}{\pi-\frac{22}{n^8}+\frac{e^{19}}{n^3}} = \lim 1\cdot\frac{63-0}{\pi-0+0} = \frac{63}{\pi}$$

V tomto příkladu vidíme, že je-li největší polynom („n na několikátou“) v čitateli i jmenovateli stejného stupně, je limitou tohoto zlomku koeficient u zmíněného polynomu.

$$\lim \frac{2^n}{n^3} = \infty$$

Jak vidno, tak geometrická posloupnost (tj. obdoba exponenciální funkce) stoupá rychleji než polynomická. A to vždycky, je-li její základ samozřejmě větší než 1; i kdyby to bylo třeba $\lim \frac{1{,}00000000001^n}{300000000\,n^{20000000}}$

Výrazy postrádající smysl

Ne vždy však budeme řešit tak jednoznačné příklady a proto by bylo namístě naznačit si, kdy nemají výrazy, které nám mohou vyjít, smysl. Tedy kdy *TCN – tudy cesta nevede* – a je pak třeba zvolit jiný, <u>občůrávací postup</u>. V zásadě jde o několik případů:

$\pm\frac{\infty}{\infty}=?$ - problém tkví v tom, že nevím, které nekonečno je větší (ono v podstatě existuje nekonečně mnoho nekonečen), takže tento výraz sám o sobě je blbost.

$+\infty-\infty=?$ - ten samý problém; nevím, které nekonečno je, chcete-li, „mohutnější“ (tzv. kardinalita), tudíž vím prdlajs, co mi vyjde.

$\pm\infty\cdot 0=?$ - Nula krát cokoliv je vždy nula. Plus nebo mínus nekonečno krát cokoliv je vždy nekonečno s příslušným znaménkem. Co je pak ale tohle? Matematická zhovadilost.

$\frac{cokoliv}{0}=?$ - Cokoliv lomené nulou je vždy plus nebo mínus nekonečno. Průšvih je, že právě nevím, zda-li je to nekonečno kladné nebo záporné. Takže také opičárna. (za *cokoliv* si můžete dosadit jakékoliv reálné číslo plus nekonečna)

Ukažme si na příkladu, k čemu nám předchozích pár řádků bylo a také názorný občůrávací způsob:

$$\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim\sqrt{n^2+n}-\lim n=\infty-\infty \quad \longleftarrow \text{ blbost, } TCN$$

Využijmež tedy poznatek, že $(A^2-B^2)=(A-B)\cdot(A+B)$ a zadefinujmež si A a B takto: $A:=\sqrt{n^2+n}\,;\,B:=n$. Pak můžeme výše jmenovaný zlomek rozšířit výrazem $\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n}$. Tím v čitateli zabijeme odmocninu a dokonce se nám sežerou i n^2. No a pak už jen postupujeme jako mnohokrát předtím – vytýkáme největší siláky.

$$\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\frac{n}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$$

To samé zajisté zvládneme i s třetí odmocninou (neboť víme, že $(A^3-B^3)=(A-B)\cdot(A^2+AB+B^2)$; $A:=\sqrt[3]{n^3+n^2}\,;\,B:=n$):

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n\right)=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n\right)\frac{\sqrt[3]{n^6+2n^5+n^4}+n\sqrt[3]{n^3+n^2}+n^2}{\sqrt[3]{n^6+2n^5+n^4}+n\sqrt[3]{n^3+n^2}+n^2}=$$

$$¿\lim\frac{n^3+n^2-n^3}{\sqrt[3]{n^6+2n^5+n^4}+\sqrt[3]{n^6+n^5}+n^2}=\lim\frac{n^2}{n^2}\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{3}$$

A protože jsme správní kádři, tak až se naučíme pracovat se sumami, uděláme si tento příklad úplně obecně, tj. $\lim\left(\sqrt[k]{n^k+n^{k-1}}-n\right)$.

Eulerovo číslo

Ale ještě před tím, než se střemhlav vrhneme na sumy (neboť je jasné, že jsou na ně vaše matematická srdéčka již natěšena), tak si trochu zablbneme s Eulerem. Tedy s jeho číslem e. To je mimo jiné definováno i takto: $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Nedočkavci mohou vyzkoušet na kalkulátoru a zjistit, že toto číslo se blíží 2,718281828. Z toho budeme vycházet a budeme zkoumat, jaká limita nám vyjde, když argument různě pozměníme.

$$\lim\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = ?$$

Snažíme se vždy nějak dostat výraz typu $\lim\left(1+\frac{1}{\check{n}eco}\right)^{\check{n}eco}$, neboť víme, že to je e. Přičemž ta něca ve jmenovateli a exponentu musí být samozřejmě stejná. Uděláme to tak, že je zestejníme, tedy k jednomu z nich přidáme vhodný člen, aby se rovnala; ovšem zároveň musíme provést tu samou opačnou operaci, aby se hodnota výrazu nezměnila (zkrátka jako když přičtete a odečtete k něčemu jedničku, nic jste vlastně neudělali a to se v matematice smí).

Po krocích na předchozím příkladu:

$$\lim\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Další příklady:

$$\lim\left(1-\frac{3}{n}\right)^n = \lim\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{n}{3}}\right)^{-\frac{n}{3}}\right]^{-3} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{\pi n}\right)^{\frac{n}{5}} = \lim\left[\left(1+\frac{1}{\pi n}\right)^{\pi n}\right]^{\frac{1}{5\pi}} = e^{\frac{1}{5\pi}} = \sqrt[5\pi]{e}$$

$$\lim\left(3+\frac{1}{0{,}6\sqrt{n}}\right)^n = \infty$$

← Ha! Tohle byl chyták. Vždyť přeci tři plus nějaké malilinkaté číslo jsou v podstatě furt tři, a to na „entou“ je krásná geometrická posloupnost, kterážto má pak za limitu nekonečno.

Tak základní srandičky s posloupnostmi a limitami máme za sebou včetně nějakých těch příkladů, takže teď už se můžeme směle vrhnout na sumy a pak snad i na něco trochu složitějšího.

Suma sumárum, aneb podivný to znak „Σ“

„Co je vlastně ta divná zmije?“ Každý z nás si už určitě nejednou položil tuto závažnou otázku. My bychom se pokusili doufejme problematiku hada trochu objasnit.

Nu, to byli staří Řekové, známí velcí matematici, kteří počítali seč jim hlava stačila. Už je ale postupem času přestávalo bavit při sčítání členů u posloupností všechny sčítance vypisovat a ještě mezi ně cpát plus. A tak si pro to vymysleli písmeno Σ (**s**igma, z toho také **s**uma, jako **s**oučet), pro násobení si vymysleli například Π (**p**í, jako násobení – **p**roduct). Nejprve však uvedeme malý příklad zápisu součtu s užitím Σ:

zápis součtu řady čísel od jedné do deseti můžeme zapsat buď klasicky takto:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10

nebo též takto:

$$\sum_{i=1}^{10} a_i$$

a obecně:

$$\sum_{j=1}^{N} a_j$$

Přičemž $a_n := n$. A znamená to v konečném výsledku to samé, akorát si ušetříme práci s vypisováním.

Čili napsali jsme symbol pro sčítání – „sumu“ Σ. V praxi to znamená: Vypiš členy z nějaké množiny a mezi každého z nich dej plusko! *i* je takzvaný sčítací index a tam dole pod sumou vidíme, že je roven jedné. Neznamená to nic jiného, než že do našeho sčítání budeme brát hned první člen z dané množiny. A u jakého členu skončíme? To nám říká symbol nad sumou a v našem příkladu vidíme, že právě u desátého.

Tedy: Vezmi všechny členy množiny od prvního až do desátého a mezi každého z nich dej plus!

Vryjmež si do hlavy a odvoďme si nejprve pár pravidel pro operace se sumami:

1) Pravidlo pro vytýkání konstanty:

$$\sum_{j=1}^{N} (ca_j + b_j) = c\sum_{j=1}^{N} a_j + \sum_{j=1}^{N} b_j$$

Dk.: Dokážeme si toto tvrzení prakticky. Zvolíme si nějaké a, b, c

a = {1, 2, 3, 4, 5} b = {2, 4, 6, 8, 10, 12} c = 3

a teď to zkusíme zapsat:

$$\sum_{j=1}^{5} (ca_j + b_j) = (3\cdot 1 + 2) + (3\cdot 2 + 4) + (3\cdot 3 + 6) + (3\cdot 4 + 8) + (3\cdot 5 + 10) + 12 = 87$$

$$c\sum_{j=1}^{5} a_j + \sum_{j=1}^{6} b_j = 3\cdot(1+2+3+4+5) + (2+4+6+8+10+12) = 87$$

Součet na levé i na pravé straně rovnice byl stejný, levá strana rovnice se rovná straně pravé, čili to sedí. Znamená to v praxi, že pokud konstantou násobíme každého člena posloupnosti, nebo násobíme konstantou konečný součet, dostaneme vždy ten samý výsledek, je to to samé, tudíž vytýkání konstanty před sumu je ekvivalentní úprava.

2) Pravidlo pro přeznačení indexu:

$$\sum_{j=1}^{N} a_j = \sum_{k=1}^{N} a_k$$

A v praxi to znamená, že je buřt, jak si ty sčítací indexy pojmenuju!

3) Pravidlo pro posunutí sčítacího indexu:

$$\sum_{j=1}^{N} a_j = \sum_{k=1+p}^{N+p} a_{k-p}$$

to vlastně znamená: $a_{(1+p)-p} + a_{(2+p)-p} \dots$
Čili jsme sčítací index, začátek sčítání, posunuli o p, tudíž musíme posunout o p i poslední sčítanec (tedy N + p), ale aby se rovnal výsledek sčítání původnímu zadání, tak od každého člena p odečteme. Proto tedy k – p.

4) Pravidlo pro limitu součtu:

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} a_j$$

Což znamená, že nekonečný součet členů jakékoli posloupnosti je roven limitě součtu libovolného počtu členů z posloupnosti.

Nyní si pro radost a názornost uveďme několik příkladů a přímo operací na uvedená pravidla:

Nejprve si ale povězme pohádku o Gaussovi. Mladej Gaussik byl koumák a ve škole měl všechno vypočítané dřív než ostatní, a tak se nudil a zlobil. Nuž, aby ho pan profesor zabavil na delší dobu, vymyslel si na něj příklad: „Sečti všechna čísla od 1 do 1000!“ A mladej Gauss se zamyslel a po chvíli už tasil výsledek…a zlobil dál. A jak to bídák udělal?
No, uvědomil si, že v té řadě čísel jsou dvojice, jejichž součet je stále stejný, a to 1001. Tedy (1 + 1000), (2 + 999), (3 + 998) atd. Také mu hnedle svitlo, že takovýchto dvojic je polovina z celkového počtu sčítaných čísel, tedy 500. Nuž a zapsal: (1000 + 1) ¿ $\frac{1000}{2}$ = 500500. A obecně – součet n po sobě jedoucích čísel je (n + 1) ¿ $\frac{n}{2}$. To se nám bude náramně hodit!

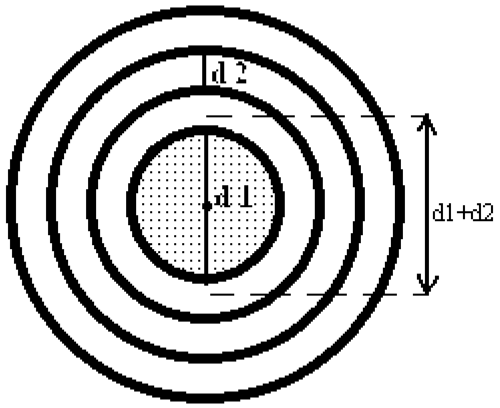
Tak se tedy pokusíme sečíst všechna lichá čísla od jedné do 99:

$$1+3+5+7+\dots+99=\sum_{i=1}^{50}(2i-1)=2\sum_{i=1}^{50} i-\sum_{i=1}^{50} 1=2\cdot(50+1)\cdot\frac{50}{2}-50=50\cdot 50=2500$$

Což znamená: Součet všech lichých čísel od 1 do 100 se dá zapsat i tou „sumou“. Sčítáme od jedné, sčítací index *i* je roven jedné. Sčítanců je celkem padesát /ve stovce je lichých čísel polovina, proto tedy padesát/, proto je nad sumou ta padesátka. Vytkneme konstantu před celou sumu a sumu rozdělíme na rozdíl dvou sčítání, rozdíl dvou sum. No a součet padesáti jedníček /o čemž vypráví druhá suma/ je roven 50, proto tedy – 50. No a 50 krát 51 bez padesáti je 2500.

Součet aritmetických posloupností

Znamená to, že vezmeme členy aritmetické posloupnosti a jednoduše je sečteme.
Ukažmež si součet aritmetických posloupností na praktickém příkladě a případě:



Záhadným způsobem se nám podařilo namotat provázek o průměru d_2 okolo tyče průměru d_1. Vrstvy provázků jsou v jedné rovině a těsně nad sebou. A ještě k tomu je těch vrstev namotáno n. Jakou délku provázku jsme na toto dílo potřebovali?

Délka provázku v první vrstvě je $\pi(d_1 + d_2)$. V druhé vrstvě bude jeho délka patrně $\pi(d_1 + 3d_2)$. No, vidíme, že nám oproti první vrstvě vzrostla o $\pi 2d_2$ a obecně bude délka následující vrstvy vždy delší o $\pi 2d_2$.

Dostáváme tak aritmetickou posloupnost, jejíž první člen je $a_1 = \pi(d_1 + d_2)$. n –tý člen naší aritmetické posloupnosti je $a_n = \pi(d_1 + d_2) + (n-1)\pi 2d_2$
podobá se to obecnému zápisu $a_n = a_1 + (n-1)d$, ne?

A jak se sčítají všechny členy posloupnosti? Součet všech členů se značí S_n. Tak tedy:

$$S_n := \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} \left[a_1 + (n-1)d\right] = d\sum_{n=1}^{N}(n-1) + \sum_{n=1}^{N} a_1 = \frac{d(N+1)N}{2} - dN + a_1 N =$$

Napsali jsme si nejprve obecný zápis aritmetické posloupnosti a rozdělili ho na dvě sumy, před jednu jsme vytkli konstantu. A podle pana Gausse jsme si nahradili první sumu součtem „enek“ od jedné do N a ten celý vynásobili konstantou d. Museli jsme ale vyhodit z tohoto součtu N jedniček vynásobených konstantou d. No a přičetli jsme N „ájedniček“

$$= \frac{d(N+1)N - 2dN + 2a_1 N}{2} = N\frac{d(N+1) - 2d + 2a_1}{2} = \frac{N}{2}\left\{a_1 + \left[a_1 + d(N-1)\right]\right\}$$

To jsme převedli na společné zlomky a upravili.

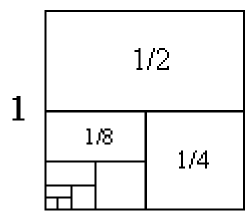
No a teď pro náš případ dosadíme za a_1 $\pi(d_1 + d_2)$ a diferenci jsme si už prozradili – $\pi 2d_2$:

$$\frac{N}{2}\cdot\left\{\left[\pi(d_1+d_2)\right] + \left[\pi(d_1+d_2) + (N-1)\pi 2d_2\right]\right\} = N\pi(d_1+d_2) + (N-1)N\pi d_2 =$$

¿ $N\pi(d_1 + Nd_2)$

Součet geometrických posloupností

Překvapivě i součet geometrické posloupnosti je laicky řečeno to, že chňapnu členy v posloupnosti a sečtu je, pěkně jeden po druhým. Podívejte:



Nakreslili jsme nejprve čtverec o hraně 1 a ten jsme rozpůlili, jeho jednu půlku také rozpůlili, jednu ze dvou vzniklých čtvrtek taky rozpůlili a tak jsme pokračovali až do nekonečna (skoro). My teď zkusíme posčítat obsahy všech obrazců, abychom zjistili, jaký obsah má celkový obrazec, jestli je konečný a kolik přesně je. No, takže když se pokusíme sčítat jednotlivé obsahy, tak počítáme: obsah prvního obdélníku je ½ , obsah malého čtverečku je ¼, menšího obdélníku 1/8. A už tušíme nějakou posloupnost! A protože vždy

půlíme a obrazců je tam n, tak naše posloupnost bude geometrickou posloupností

$$a_n = a_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Tak teď uděláme zápis součtu nějaké obecné geometrické posloupnosti pomocí sumy:

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_1 q^{n-1}$$

A jen tak pro legraci napíšeme součet obecné geometrické posloupnosti (stejné jako prve), která je ještě navíc vynásobená kvocientem q:

$$q \cdot S_N = \sum_{n=1}^{N} a_1 q^n$$ ale ten je podobný, jako ten první součet, akorát v jeho řadě je navíc člen $a_1 q^n$, ale chybí mu zase oproti prvnímu první člen a_1.

No, a když tyto dva součty posloupností od sebe odečteme, uvidíme něco zajímavého:

$$S_N(1-q) = \sum_{n=1}^{N} a_1 q^{n-1} - \sum_{n=1}^{N} a_1 q^n = a_1 \sum_{n=1}^{N} q^n - a_1 q^n + a_1 - a_1 \sum_{n=1}^{N} q^n = -a_1 q^n + a_1$$

vypadnou nám právě ony dva členy $-a_1 q^n + a_1$

čili $S_N(1-q) = -a_1 q^N + a_1$

A když vyjádříme opět samotný součet geometrické posloupnosti:

$$S_N = \frac{a_1 - a_1 q^N}{1-q} = a_1 \frac{q^N - 1}{q-1}$$

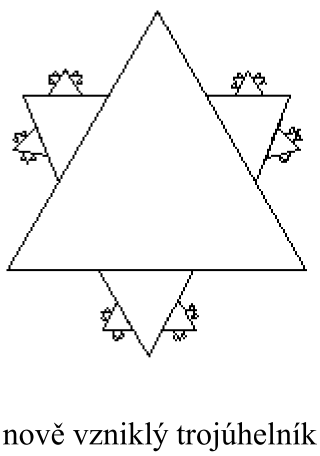
a pokud za a_1 dosadíme náš první člen – obsah prvního obrazce ½ , za kvocient ½ (to už jsme věděli dřív), tak dostaneme:

$$S_N = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$ – no, ale nevidíme nějaký konkrétní výsledek součtu, ale víme již, že nekonečný součet je roven limitě součtu několika členů řady. No, tak si spočítáme limitu!

$$\lim \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{0-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

Tak tedy celkový obsah obrazce ze konečný, dokonce ho i víme, je 1! To je ale překvápko! Obzvláště, když šlo o čtverec, jehož obsah je a^2.

A na závěrečné zopakování si dáme pěkný příklad:



Nakreslili jsme rovnostranný trojúhelník o obsahu 1 a nad třetinou jeho každé strany jsme udělali další trojúhelník se stranou rovnou třetině strany původního trojúhelníku. A vždy nad třetinou strany čouhající ven jsme udělali třetinový trojúhelník a tak jsme pokračovali až do nekonečna. A nás zajímá, jaký má celkový obrazec obsah a obvod. Jsou konečné? A když jo, tak teda kolik jsou?

No, to by nemuselo být zas tak těžké, že? Vidíme, že každý nově vzniklý trojúhelník je devítinou trojúhelníku předcházejícího. No, akorát nám nejprve vznikly tři trojúhelníky, což je vlastně třetina obsahu původního trojúhelníku a potom

vždy dva nové trojúhelníky, které jsou vždy a pořád dvěmi devítinami trojúhelníku předcházejícího. Takže pokud budeme sčítat obsahy, bude to:
S = 1 + 1/3 + 1/3[2/9 + $(2/9)^2$…]
takže to můžeme zapsat jednodušeji i takto:

$$S=1+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{2}{9}\right)^n$$

No vždyť to je právě součet geometrické posloupnosti $a_{n:}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^n$ a my už jsme přece dospěli k závěru, že to je

$$S_N=\frac{a_1-a_1q^n}{1-q}=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$$

a teď můžeme klidně za a_1 do tohoto vztahu dosadit 1/3 a za q 2/9.

$$S_N=\frac{1}{3}\frac{\left(\frac{2}{9}\right)^n-1}{\frac{2}{9}-1}$$

A stále si pamatujeme, že nekonečný součet členů je roven jejich limitě, takže spočítáme limitu tohohle součtu!

$$\lim\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\frac{2}{9}\right)^n-1}{\frac{2}{9}-1}\right]=\frac{1}{3}\cdot\frac{0-1}{-\frac{7}{9}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{7}=\frac{3}{7}$$

Ale musíme k výsledku toho nekonečného součtu (k té limitě) přičíst přece tu jedničku.
Takže konečný výsledek je $\frac{10}{7}$ obsahu původního rovnostranného trojúhelníku. Jinak pro rovnostranný trojúhelník, který nemá jednotkový obsah, by celkový obsah obrazce byl

$$S=\frac{10}{7}\cdot a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

A jak to bude s obvodem?
No, nejprve spočteme obvod těch částí u hlavního trojúhelníku, na kterém už „nerostou" další trojúhelníky. To je celkem šest třetin, takže 2. U těch menších trojúhelníků je to dvanáct třetin z třetiny velkého trojúhelníku. Takže 12/9 (= 4/3). No a pak vždy přičítám 2x dvě třetiny za menší a menší trojúhelník.

Proto: $O=2+\frac{4}{3}+3\left(\frac{2}{3}\right)^2\ldots=\frac{10}{3}+3\sum_{n=3}^{N}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{10}{3}+3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1-q^N}{1-q}-3\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\right)=2\cdot\frac{1-q^N}{1-q}$

No a spočítáme limitu tohoto nekonečného součtu geometrické posloupnosti:

$$\lim\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^N}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1-0}{\frac{1}{3}}=3$$

Ha! Takže vidím, že obvod má tento obrazec konečný, a to 3! Přestože stále přibývají nové trojúhelníky!

A nakonec slibované obecné řešení dávno zapomenutého příkladu

No a protože teď už jsme ostřílení sumaři, tak se můžeme vrhnout na obecné odvození limity onoho příkladu, jak bylo slíbeno. To už je trošičku prasárnička, takže k tomu raději využijeme tohoto obecného rozvoje:

$$\left(A^n-B^n\right)=\left(A-B\right)\cdot\left(A^{n-1}+A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+\ldots+A^2B^{n-3}+AB^{n-2}+B^{n-1}\right)=\left(A-B\right)\cdot\sum_{i=0}^{n-1}a^{n-1-i}b^i$$

a opět si šikovně zadefinujme, že $A:=\sqrt[k]{n^k+n^{k-1}}\,;B:=n$. A můžeme se směle vrhnout do samotného počítání:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[k]{n^k+n^{k-1}}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[k]{n^k+n^{k-1}}-n\right)\frac{\sum_{i=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{n^k+n^{k-1}}\right)^{k-1-i}n^i}{\sum_{i=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{n^k+n^{k-1}}\right)^{k-1-i}n^i}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-1}}{\sum_{i=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{n^k+n^{k-1}}\right)^{k-1-i}n^i}=$$

$$¿\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-1}}{n^{k-1}}\frac{1}{\sum_{i=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{n^k+n^{k-1}}\right)^{k-1-i}n^{i-(k-1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sum_{i=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{n^k+n^{k-1}}\right)^{k-1-i}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1-i}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sum_{i=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{1+\frac{1}{n}}\right)^{k-1-i}}=$$

$$¿\frac{1}{\sum_{j=1}^{k}\left(\sqrt[k]{1+0}\right)^{k-j}}=\frac{1}{\sum_{j=1}^{k}1}=\frac{1}{k}$$

Trocha slovního objasnění – v prvním kroku došlo již rutinně k rozšíření zlomku, ve druhém se pak v čitateli vyžrala n^k, ve třetím jsme si vytkli největšího siláka, který se také vzájemně zabil (ve jmenovateli jsme záměrně vytýkali z n^i, aby nám vyšel pěkný exponent), ve čtvrtém jsme si pak vhodně napsali člen, ze kterého bylo v minulém kroku vytýkáno a hned v pátém kroku jsme ho strčili pod odmocninu, kde se sežral s n^k a n^{k-1}. V šestém kroku už jen vypisujeme přímo hodnoty limity pro jednotlivé členy pod odmocninou a zároveň si přeznačíme sčítací index (j := i + 1), prostě aby to vypadalo hezky, a v předposledním už krásně vidíme, že hledaná limita je jedna lomeno součtem daného počtu jedniček. A těch je tam kolik? No přeci k! Tedy výsledek: 1/k.