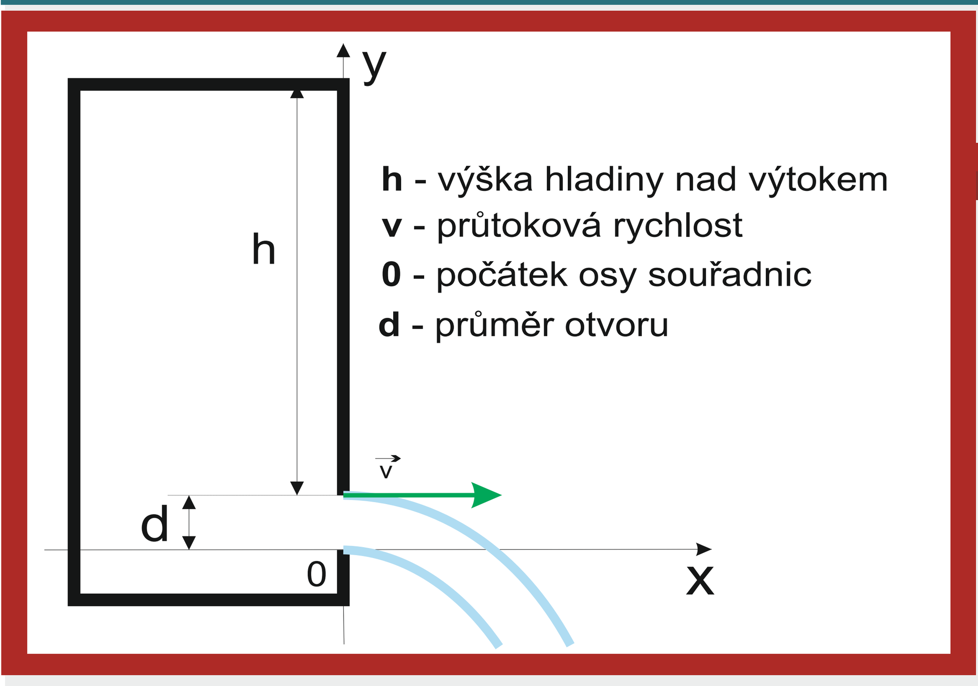
VODNÍ PRAMEN JAKO OPTICKÉ VLÁKNO

Na projektu se podíleli: David Brožek, Tomáš Nosek, Vojtěch Munzar, Tomáš Klapka

VEDOUCÍ PROJEKTU: Ondřej Lev



ÚVOD

Do plastové lahve uděláme kruhový otvor, z něhož bude vytékat voda v pramínku, který bude mít tvar paraboly. Posvítíme-li zezadu do pramene světelným paprskem (např. laserem), bude pramen vést světlo stejně jako optické vlákno. Tento jev nastane pouze při dostatečně malém zakřivení paraboly a je založen na principu totální reflexe.

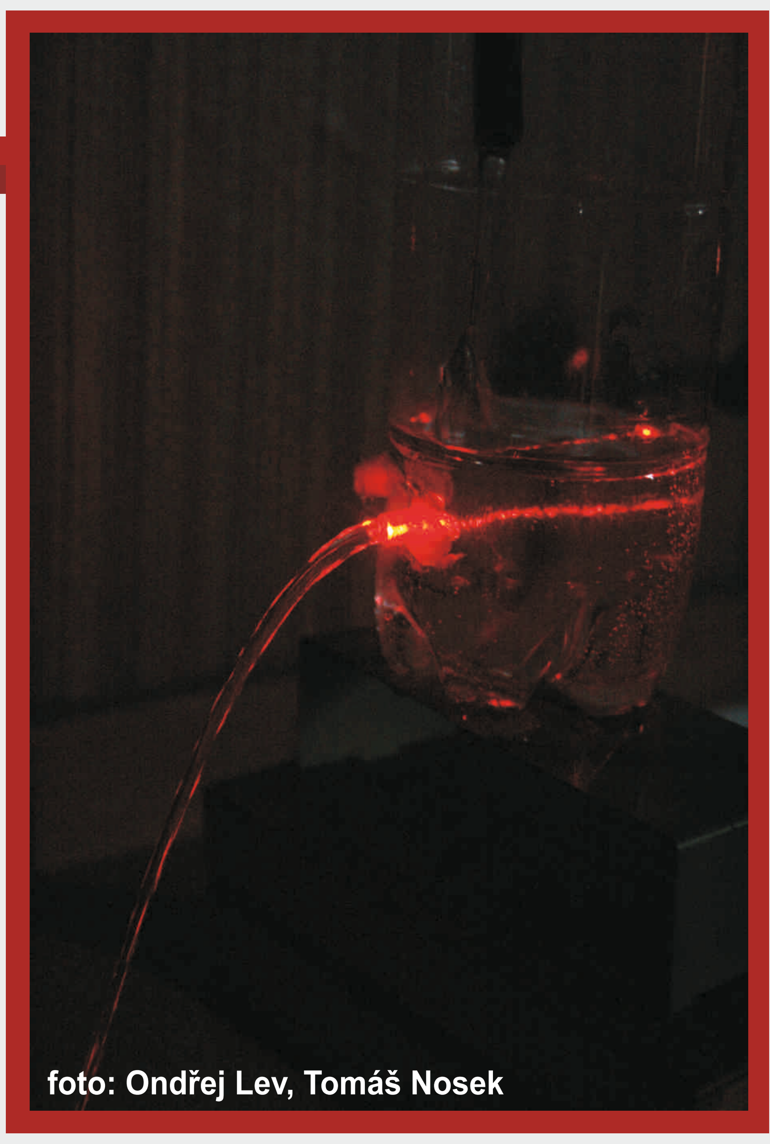
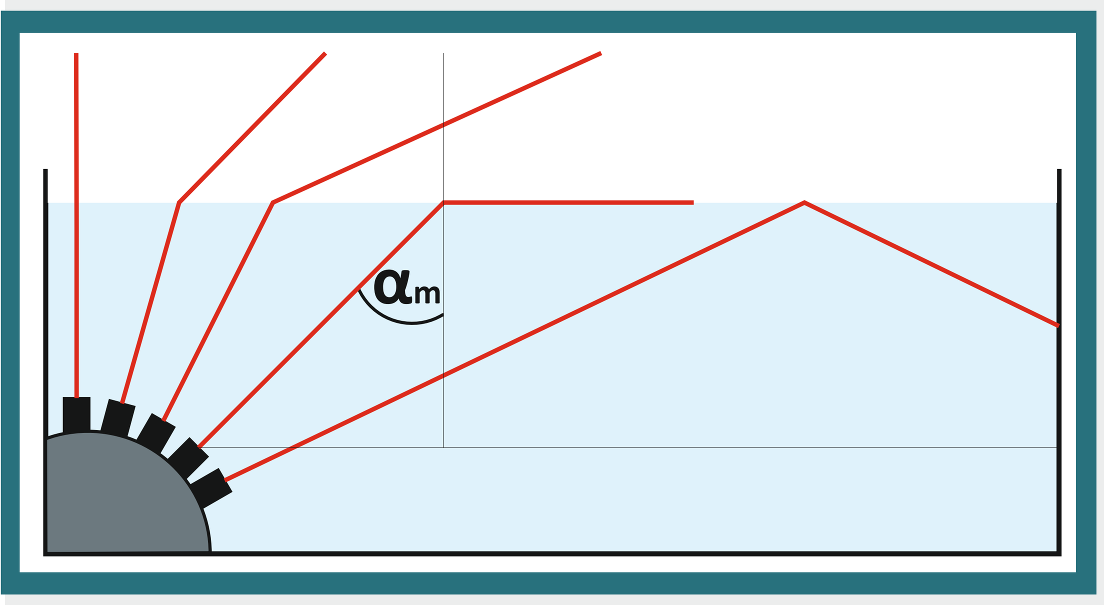


foto: Ondřej Lev, Tomáš Nosek

TOTÁLNÍ REFLEXE



Prochází-li světlo z prostředí opticky hustšího do prostředí opticky řidšího (např. z vody do vzduchu) nastává lom světla od kolmice. S rostoucím úhlem dopadu se zvětšuje i úhel lomu . Při mezním úhlu dopadu α_m dosáhne úhel lomu maximální možné velikosti β=90° a zlomený paprsek splývá s rozhraním prostředí (viz. obr. vlevo). Je-li úhel dopadu větší než mezní úhel, k lomu světla nedochází a nastává totální reflexe – všechno světlo se odrazí do hustšího prostředí (viz. obr. vlevo níže: totální reflexe laserového paprsku na vodní hladině). Na tomto jevu jsou založena optická vlákna, která nám umožňují vést světlo bez ztrát na velké vzdálenosti.
Lom světla popsal na počátku 17. stolení holandský fyzik W. Snell pomocí rovnice: α je úhel dopadu (měříme od kolmice na dopadovou plochu), β úhel odrazu a n_1, n_2 jsou indexy lomu.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{n_1}{n_2}$$

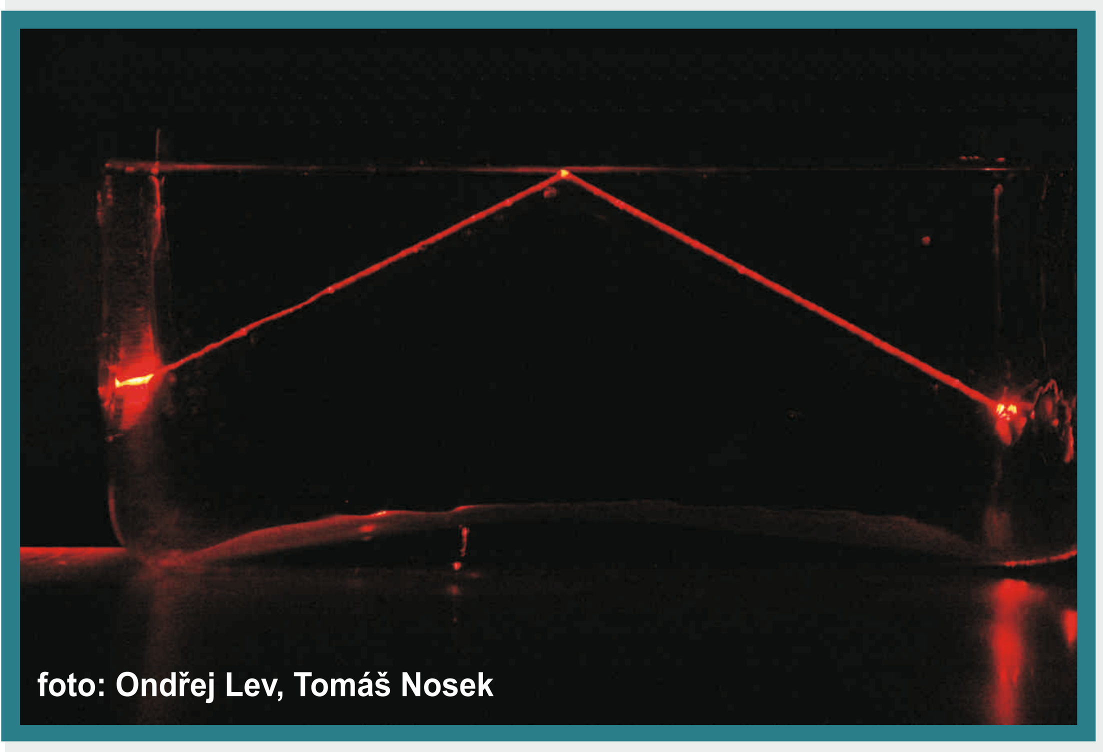
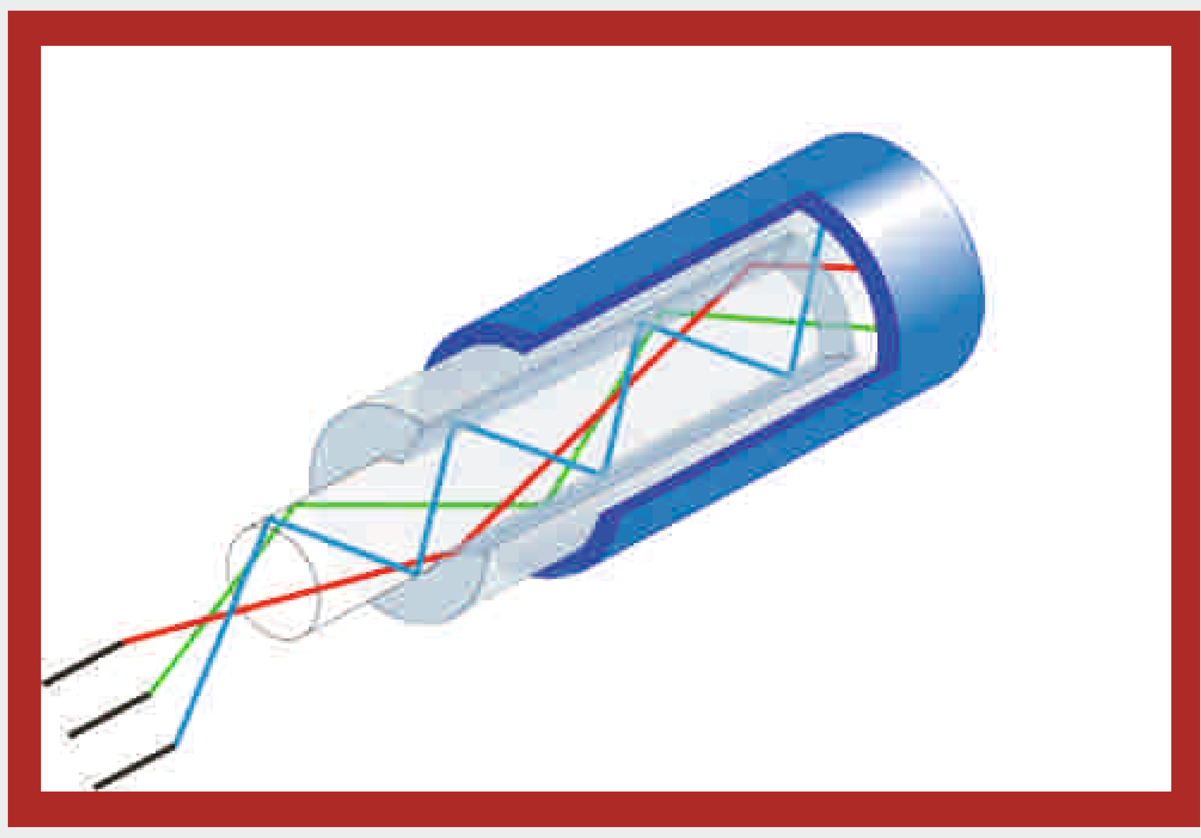


foto: Ondřej Lev, Tomáš Nosek

OPTICKÉ VLÁKNO

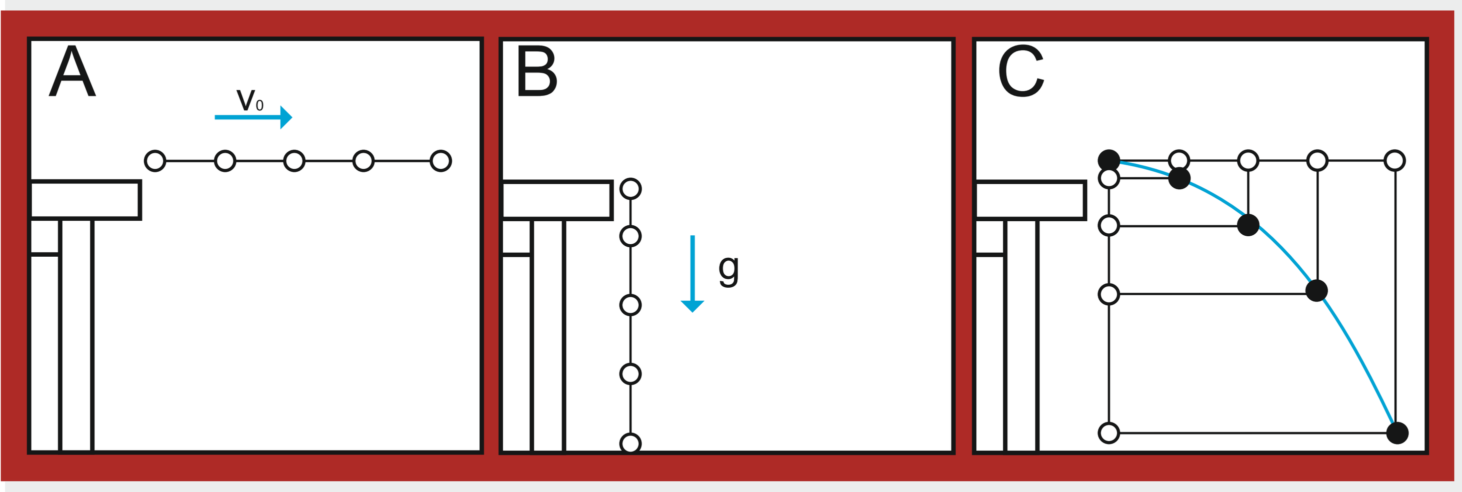
Optické vlákno je velmi úzká skleněná nebo plastová trubička ($d \sim 10^{-5}$m), která vede světelný paprsek. Aby nedocházelo k nežádoucím ztrátám, musí paprsek dopadat na okraje vlákna pod úhlem větším než je mezní úhel. Proto se optické vlákno nesmí příliš ohýbat, v místě ohybu by docházelo ke ztrátám signálu. Optické kabely umožňují přenos obrovského množství informací, tvoří například základ celosvětové internetové sítě.



ZÁKON ZACHOVÁNÍ ENERGIE

Pramen vody se chová stejně jako optické vlákno. Světlo se v prameni odráží jen tehdy, je-li pramen dostatečně málo ohnutý, poté dochází k totální reflexi a paprsek se udrží uvnitř pramene. Zakřivení pramene (paraboly) roste s klesající výtokovou rychlostí. Tato rychlost závisí na výšce hladiny vody v lahvi . Pro výpočet závislosti výtokové rychlosti na výšce hladiny využíváme zákona zachování energie: Při všech dějích v izolované soustavě těles se mění jedna forma energie v jinou nebo přechází z jednoho tělesa na druhé, celková energie soustavy se nemění. Pro jednotkový objem vody máme $h\varrho g=\frac{1}{2}\varrho v^2$ odkud $v^2=2hg$

VODOROVNÝ VRH



Pro určení tvaru vodního pramínku si uvědomíme, že se vlastně jedná o vrh vodorovný. Trajektorie tohoto pohybu je popsána rovnicemi:

$$\mathbf{y(t)}=-\frac{1}{2}\mathbf{gt^2}\qquad \mathbf{x(t)}=\mathbf{vt}$$

Vyloučením času dostáváme $\mathbf{y}=-\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{2v^2}}\mathbf{x^2}$, který popisuje tvar okrajů pramínku.

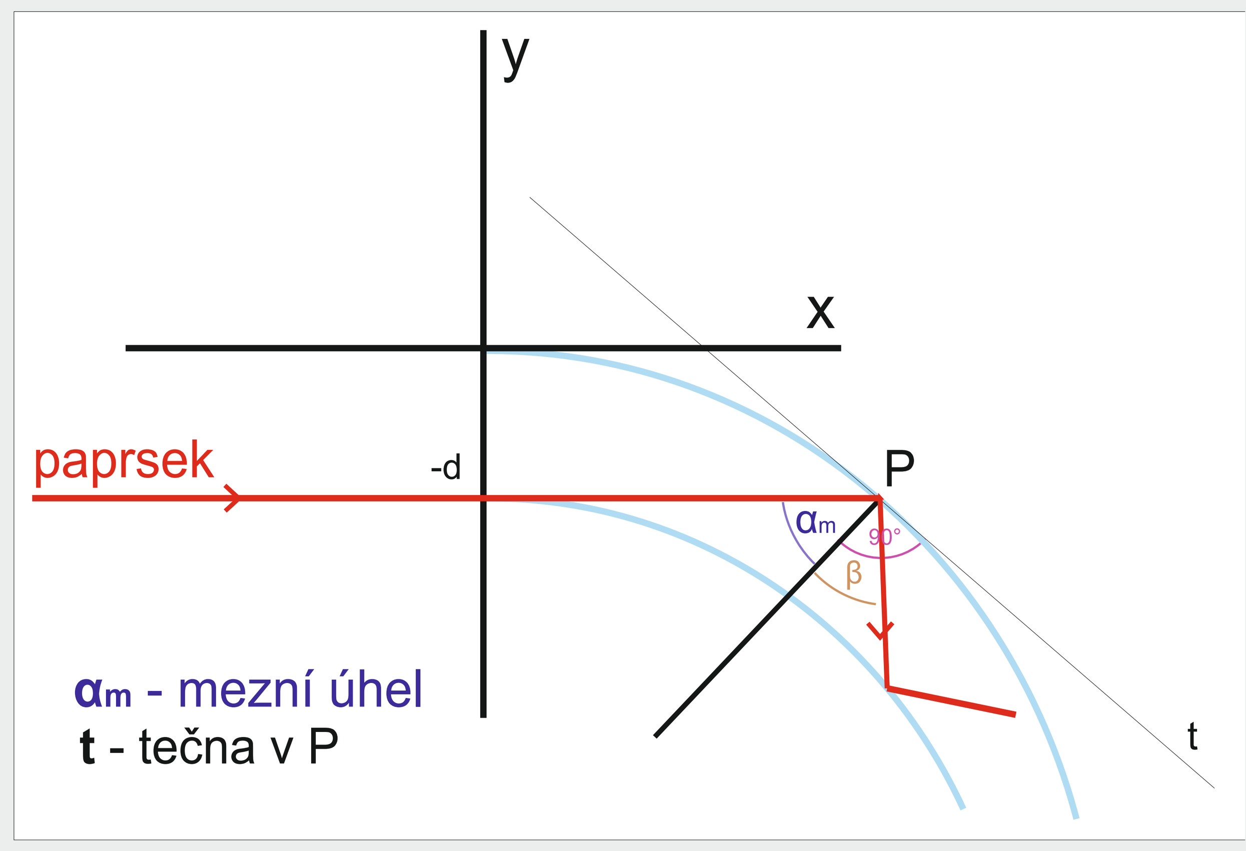
PRVNÍ ODRAZ PAPRSKU V PRAMÍNKU

Vodní pramínek matematicky popíšeme jako dvojici parabol, vzájemně vzdálených **d** (průměr výtokového otvoru). Místo prvního dopadu paprsku na horní okraj pramínku je průnikem paraboly $y=-\frac{g}{2v^2}$ a rovnice paprsku $y=-d$

Tento bod má souřadnice $P=[2\sqrt{hd};-d]$

Po určení tečny paraboly v bodě P lze pomocí skalárního součinu spočítat, že pro úhel dopadu platí vztah $\sin\alpha_m=\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{d+h}}$

Ze zákonu lomu světla víme, že $\sin\alpha_m=\frac{1}{n}$. Nyní lze jednoduchým výpočtem odvodit vztah $h=\frac{d}{n^2-1}$ mezi minimální výškou hladiny vody v lahvi, při které dojde k úplnému odrazu paprsku a průměrem výtokového otvoru (n=1,33 je index lomu vody).



SHRNUTÍ

Voda dosáhne kritické rychlosti při výšce $h=\frac{d}{n^2-1}$, při této výšce nastává poslední moment, kdy se paprsek odrazí ve směru pramene vody. Aby došlo k totální reflexi v prameni vody, musí být splněno několik na sobě závislých podmínek: dostatečná výška hladiny, dostatečná výtoková rychlost, malé zakřivení pramene a úh dopadu musí být vetší než je mezní úhel.Tento výpočet je pouze matematickým modelem pokusu. Veškerá tření (vnitřní tření vody, tření vody o vzduch) jsou zanedbána. Ve skutečnosti nemá vodní pramínek přesně parabolický tvar – jeho okraje bývají „roztřepeny“ a v důsledku toho nevede pramínek světlo na příliš velko vzdálenost. Ve výpočtu výtokové rychlosti je zanedbána rychlost poklesu hladiny v lahvi. To je dobře možné, pokud je výtokový otvor řádově menší než průměr lahv

Tento projekt byl teoreticky i experimentálně vypracován na matematicko–fyzikálním kroužku μᵐφ , který probíhá každý pátek pod vedením Ondřeje Lva.
Tímto bychom mu všichni chtěli poděkovat za pomoc, ochotu a trpělivost při řešení této i mnoha jiných úloh.
Příprava lahve, grafická úprava tohoto posteru: Tomáš Klapka, vypočet a text: David Brožek, sepsání rovnic: Vojtěch Munzar, foto: Tomáš Nosek a Ondřej Lev.